Masalah dan algoritma digraf eksentris dari digraf

Hazrul Iswadi, Arif Herlambang, Heru Arwoko

Departemen Matematika dan IPA (MIPA), Universitas Surabaya

Abstrak

Eksentrisitas $e(u)$ suatu titik u di digraf G adalah jarak maksimum dari u ke titik lain di G. *Titik eksentris* u adalah titik lain v di G yang memiliki jarak dari u sama dengan $e(u)$. *Digraf eksentris* $ED(G)$ dari digraf G adalah digraf yang memiliki titik yang sama dengan G dan terdapat busur u ke v jika dan hanya jika v titik eksentris u. Digraf eksentrisitas iterasi ke-k dari digraf G ditulis sebagai $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$, dengan $ED^1(G) = ED(G)$ dan $ED^0(G) = G$. Dengan menggunakan studi literatur, paper ini akan memaparkan masalah (sering disebut open problem) seputar digraf eksentris dari digraf dan hipotesis (sering disebut sebagai konjektur). Kemudian paper ini memperkenalkan algoritma dan program yang dapat digunakan untuk mencari iterasi digraf eksentris dari digraf.

Kata-kunci: eksentrisitas, digraf eksentris, iterasi

PENDAHULUAN

Sistim pertandingan olahraga sering menggunakan pertandingan setengah kompetisi (*round-robin tournament*) yaitu setiap tim atau atlet yang bertanding akan menghadapi musuhnya masing-masing satu kali dan juara dalam sistim pertandingan tersebut dinilai dari seberapa banyak tim atau atlet tersebut mampu mengalahkan sebanyak mungkin musuh-musuhnya. Para ahli teori graf memodelkan sistim pertandingan di atas menjadi suatu bentuk sistim yang disebut *turnamen* (Harary dkk (1966)). Turnamen merupakan bagian dari suatu kelas yang lebih umum yang disebut dengan digraf (*directed graph*).

Suatu *digraf* (directed graph) $G = G(V,E)$ adalah sebuah himpunan tak kosong berhingga $V = V(G)$ yang disebut dengan *titik-titik* dan himpunan pasangan terurut $E = E(G)$ dari titik-titik u dan v yang berbeda di V yang disebut dengan *busur-busur* dan ditulis dengan $a = (u,v)$. Kardinalitas himpunan titik $|V(G)|$ digraf G disebut dengan *orde* (order) G dan kardinalitas himpunan busur $|E(G)|$ digraf G disebut dengan *ukuran* (size) G. Digraf G dengan satu titik disebut dengan digraf trivial. Pendefinisian *graf* G hampir sama dengan digraf kecuali himpunan pasangan terurut diganti dengan himpunan pasangan tak terurut yang disebut dengan *sisi-sisi*. Digraf G_1 dikatakan *isomorfis* dengan digraf G_2 jika terdapat pemetaan satu-satu Φ, yang disebut dengan *isomorfisma*, dari $V(G_1)$ pada $V(G_2)$ sehingga $(u,v) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(\Phi(u), \Phi(v)) \in E(G_2)$. Jika digraf G_1 *isomorfis* dengan digraf G_2 maka ditulis dengan $G_1 \cong G_2$.

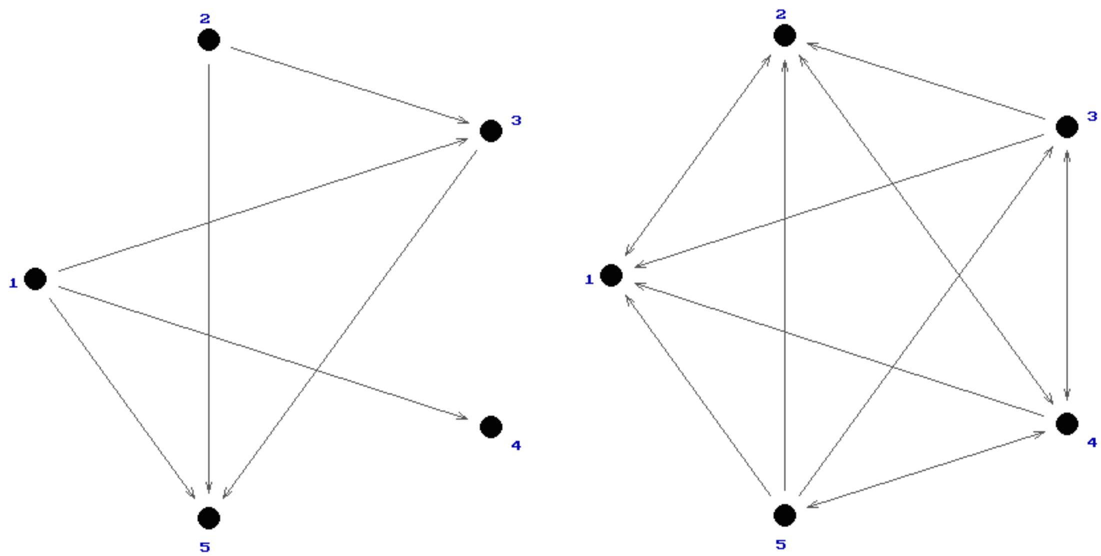
Jalan berarah W (directed walk) dengan panjang k di digraf G adalah barisan berhingga $W = v_0 a_1 v_1 \ldots a_k v_k$ yang memiliki bentuk selang-seling titik dengan busur sehingga untuk $i = 1, 2, \ldots, k$ busur a_i mempunyai pangkal v_{i-1} dan akhir v_i. *Lintasan berarah* P (directed path) dengan panjang k di digraf G adalah jalan berarah dengan titik-titik $v_0, v_1, \ldots, v_k$ semuanya berbeda. Jika lintasan berarah $P = v_0 a_1 v_1 \ldots a_k v_k$ diketahui dengan jelas seringkali ditulis dengan singkat sebagai lintasan berarah v_0-v_k. *Lingkaran berarah* (directed cycle) C_k dengan panjang k adalah sebuah lintasan berarah dengan titik awal v_0 sama dengan titik ujung v_k. Untuk selanjutnya jalan berarah, lintasan berarah, dan lingkaran berarah disingkat dengan menyebut sebagai jalan, lintasan, dan lingkaran.

Jarak (distance) $d(u,v)$ antara titik u dan v adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u ke v. Didefinisikan $d(u,v) = \infty$ jika tidak ada lintasan yang menghubungkan u ke v. *Eksentrisitas* (eccentricity) $e(u)$ dari titik u adalah maksimum jarak dari u ke suatu titik lain di digraf G atau $e(u) = \max_{v \in G} d(u,v)$. Titik v adalah *titik eksentris* (vertex eccentric) dari u jika $d(u,v) = e(u)$.

OPEN PROBLEM DAN KONJEKTUR

Memperoleh digraf atau graf baru berdasarkan graf atau digraf lama yang diberikan sudah menjadi perhatian dari ahli teori graf sejak lama. Contoh graf yang diturunkan dari graf G atau digraf D yang diberikan adalah graf garis $L(G)$ atau digraf garis $L(D)$ (line graph atau digraph), graf total $T(G)$ (total graph) dan graf pangkat ke-n G^n (n-th power G^n) (lihat Parthasarathy (1994)). Buckley tertarik untuk mendapat digraf baru dari graf lama dengan menggunakan konsep jarak dengan mendefinisikan *digraf eksentris* (digraph eccentric) $ED(G)$ dari graf G sebagai suatu digraf yang mempunyai titik yang sama dengan G dan terdapat sebuah busur dari u ke v jika v adalah titik eksentris dari u (Buckley (2001)). Buckley sampai pada kesimpulan " Untuk hampir semua graf G, digraf eksentrisnya adalah $ED(G) = (\overline{G})^*$", dengan $(\overline{G})^*$ menyatakan komplemen G dimana tiap sisi tak berarah diganti dengan dua busur simetri. Boland dan Miller (2001) memperkenalkan digraf eksentris dari sebuah digraf dengan beberapa pertanyaan terbuka tentang sifat dan eksistensi digraf eksentris bermacam-macam kelas dari digraf.

Miller dkk (2002), memperkenalkan iterasi dari digraf eksentrisitas G. Diberikan bilangan bulat $k \geq 2$, digraf eksentrisitas iterasi ke-k G ditulis sebagai $ED^k(G) = ED(ED^{k-1}(G))$. Sedangkan $ED^1(G) = ED(G)$ dan $ED^0(G) = G$. Untuk setiap digraf G terdapat bilangan bulat terkecil $p > 0$ dan $t \geq 0$ sehingga $ED^t(G) = ED^{t+p}(G))$. Bilangan p disebut *periode* (period) G, dinotasikan dengan $p(G)$, dan bilangan t disebut dengan *ekor* (tail) G, dinotasikan dengan $t(G)$. Digraf G disebut *periodic* jika $t(G) = 0$. Kemudian juga terdapat bilangan bulat terkecil $p' > 0$ dan $t' \geq 0$ sehingga $ED^{t'}(G) \cong ED^{t'+p'}(G))$. Bilangan p' disebut dengan *iso-perioda* dan t' disebut dengan *iso-tail*. Jika $t'(G) = 0$ maka digraf G disebut dengan *iso-periodik*. Contoh digraf G dengan digraf eksentrisnya yang dapat ditentukan dengan memeriksa langsung.



a. Digraf G b. Digraf eksentris $ED(G)$

Gambar 1. Digraf G dengan digraph eksentris $ED(G)$

Miller dkk (2002) mengusulkan beberapa persoalan dan konjektur sebagai berikut:

Open problem 1 : Tentukan kondisi cukup dan perlu untuk suatu digraf menjadi digraf eksentris

Open problem 2 : Tentukan perioda dan ekor dari bermacam kelas graf dan digraf.

Konjektur 1 : Untuk setiap digraf G dengan n titik

$$p(G) \leq \frac{n-1}{2}$$

Open problem 3 : Untuk setiap n, identifikasi berapa kelas periodik yang mungkin terjadi (sebuah kelas disebut periodik jika setiap graf dalam kelas tersebut periodik).

Open problem 4 : Untuk setiap digraf G, apakah benar bahwa $t(G) = t'(G)$?

Dalam Miller dkk (2002) juga terdapat beberapa open problem dan konjektur yang lain yang dalam paper ini tidak dituliskan karena untuk menuliskannya memerlukan definisi-definisi lain yang cukup banyak. Untuk lebih jelas pembaca dapat melihat sendiri di Miller dkk (2002).

Iswadi (2003a) dan (2003b) tertarik untuk menggunakan konjektur 1 pada kelas tertentu dari digraf yang disebut turnamen. Kenapa pada turnamen? Jawabannya adalah karena struktur turnamen sangat kaya seperti yang diungkap oleh Clark J. dkk (1991) dan turnamen adalah kelas digraf yang paling sering diteliti (Bang-Jensen dkk (1996)). Selain alasan-alasan di atas, digraf eksentris $ED(T)$ dari turnamen T mempunyai arti jika u terhubung ke v pada digraf eksentris $ED(T)$ maka v merupakan musuh yang paling sukar dikalahkan oleh u. Sifat dari eksentrisitas dari turnamen telah diteliti oleh Harminc M. dkk (1994).

Definisi dan istilah yang berkaitan dengan turnamen berikut ini diambilkan dari Chartrand dkk (1996) dan Jimenez (1998). Sebuah *turnamen* $T = (V,E)$ berorde n adalah sebuah digraf tanpa loop sedemikian sehingga tiap pasang titik-titik v_i dan v_j dihubungkan dengan tepat satu busur (v_i,v_j) atau (v_j,v_i). Jika $(v_i,v_j) \in E$ maka disebut v_i *mendominasi* v_j dan v_j *didominasi oleh* v_i. *Derajat keluar* (out-degree) $\deg^+(v_i)$ dari suatu titik v_i pada turnamen T adalah jumlah titik-titik yang didominasi oleh v_i. *Derajat masuk* (in-degree) $\deg^-(v_i)$ dari suatu titik v_i pada turnamen T adalah jumlah titik-titik yang mendominasi v_i. Dalam turnamen setengah kompetisi (round-robin tournament), derajat keluar $\deg^{+}(v_i)$ dari suatu titik v_i adalah jumlah kemenangan yang dicapai pemain v_i. Karena alasan kedekatan istilah maka derajat keluar $\deg^{+}(v_i)$ suatu titik v_i sering disebut dengan *skor* s_{v_i}. Sebuah titik v_i di turnamen T yang berorde n disebut *pemancar* (transmitter) v_i jika mempunyai skor $s_{v_i} = n$-1 dan disebut *penerima* (receiver) jika mempunyai skor $s_{v_i} = 0$. *Kekalahan* (reversal) $\tilde{T}$ dari suatu turnamen T adalah turnamen yang diperoleh dari T dengan membalik semua arah busurnya. Sehingga kekalahan dari kekalahan $\tilde{\tilde{T}}$ adalah T sendiri. Sebuah turnamen tak trivial dengan orde n disebut *regular* jika n ganjil dan setiap titik mempunyai skor $s_{v_i} = \dfrac{n-1}{2}$. Sedangkan turnamen T disebut *transitif* jika (v_i,v_j) dan (v_j,v_k) busur-busur di T maka (v_i,v_k) juga busur di T. Turnamen T disebut *kuat* jika untuk setiap pasangan titik v_i dan v_j selalu terdapat lintasan v_i-v_j dan v_j-v_i. Turnamen kuat T disebut trivial jika T memiliki orde 1 dan 2. *Barisan skor* turnamen adalah barisan skor $s_{v_1} \leq s_{v_2} \leq \dots \leq s_{v_n}$ dari titik-titiknya yang biasa ditulis dengan S: $s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_n}$.

Dari Chartrand dkk (1996) telah diketahui untuk turnamen T orde n, untuk setiap n, hanya ada tepat satu dengan barisan skor 0, 1, 2, ... , n-1. Sifat digraf eksentris dan iterasi digraf eksentris untuk turnamen regular dan transitif sudah diteliti oleh Iswadi (2003a). Digraf eksentris $ED(T)$ dari turnamen transitif T orde n dengan v titik pemancar adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari turnamen transitif T ditambah dengan busur-busur dari v ke titik-titik yang lain. Turnamen transitif T orde n memiliki $p(T) = 2$ dan $t(T) = 1$. Sedangkan digraf eksentris dari turnamen regular T orde n adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari T. Turnamen regular T orde n periodik dan $p(T) = 2$. Kemudian Iswadi (2003b) meneliti sifat-sifat digraf eksentris dari turnamen kuat dan diperoleh hasil bahwa digraf eksentris dari turnamen kuat T orde n adalah kekalahan $\tilde{T}$ dari T dan periodik dengan $p(T) = 2$. Semua hasil yang diperoleh Iswadi pada turnamen sesuai dengan konjektur 1 di atas.

ALGORITMA DAN PROGRAM

Jika ingin mengetahui sifat-sifat digraf eksentris $ED(G)$ dari digraf G maka perlu mengetahui bentuk dari $ED(G)$ itu sendiri. Karena proses untuk mendapatkan digraf eksentris dari digraf G dilakukan dengan memeriksa eksentrisitas $e(u)$ masing-masing titik u di digraf G maka terjadi proses berulang dan rutin. Apalagi jika ingin ditentukan sifat periodik dari digraf G dengan melakukan iterasi digraf eksentris beberapa kali maka diperlukan program komputer yang dapat melakukan pekerjaan tersebut.

Untuk mendapatkan digraf eksentris dari suatu digraf G dilakukan melalui beberapa tahapan. Tahapan pertama mencari jarak dari suatu titik u ke titik lain v di G. Jarak $d(u,v)$ dapat ditentukan dengan nenggunakan algoritma Moore’s Breadth First Search (lihat Chartrand dkk (1993)). Tahapan kedua, menentukan eksentrisitas $e(u)$ yaitu $e(u) = \max_{v \in G} d(u,v)$, untuk setiap titik u di G. Tahapan ketiga, menentukan titik eksentrisitas dari u yaitu titik lain v yang memiliki sifat $e(u) = d(u,v)$. Tahapan keempat, menghubungkan titik u dan v di $ED(G)$. Tahapan-tahapan untuk memperoleh digraf eksentris $ED(G)$ tersebut kemudian dituangkan menjadi langkah-langkah pada algoritma berikut. Pada langkah-langkah algoritma di bawah kami sertakan tampilan program hasil implementasi yang dikerjakan oleh penulis ketiga.

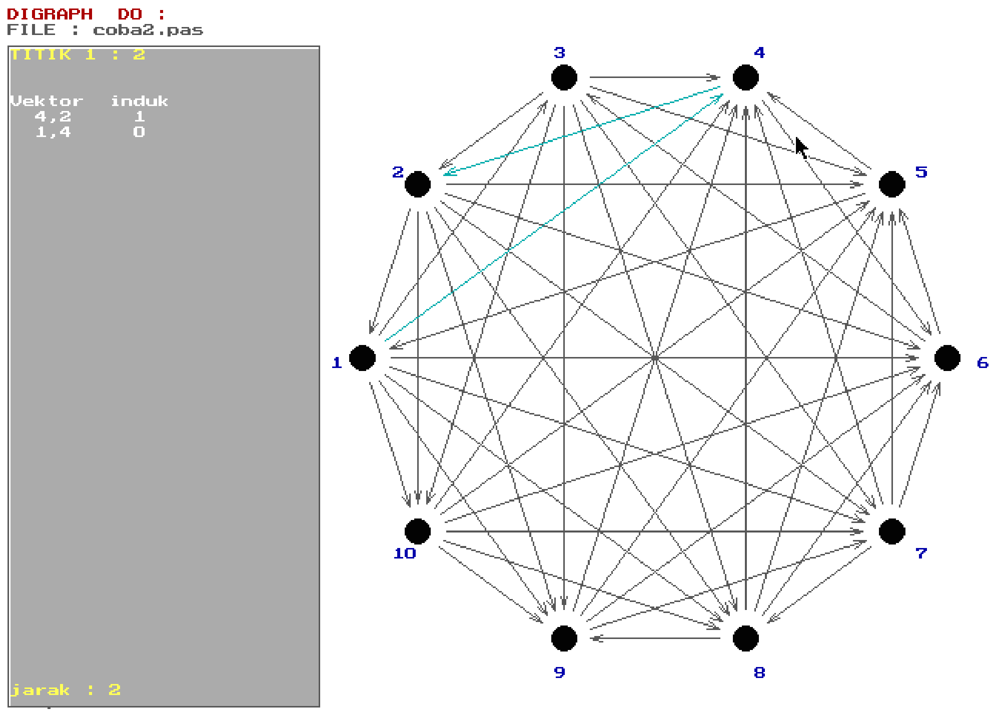
Algoritma menentukan digraf eksentris dari digraf *G*

Input : Digraf *G*

Output : Digraf Eksentris *ED*(*G*)

Langkah-langkah :

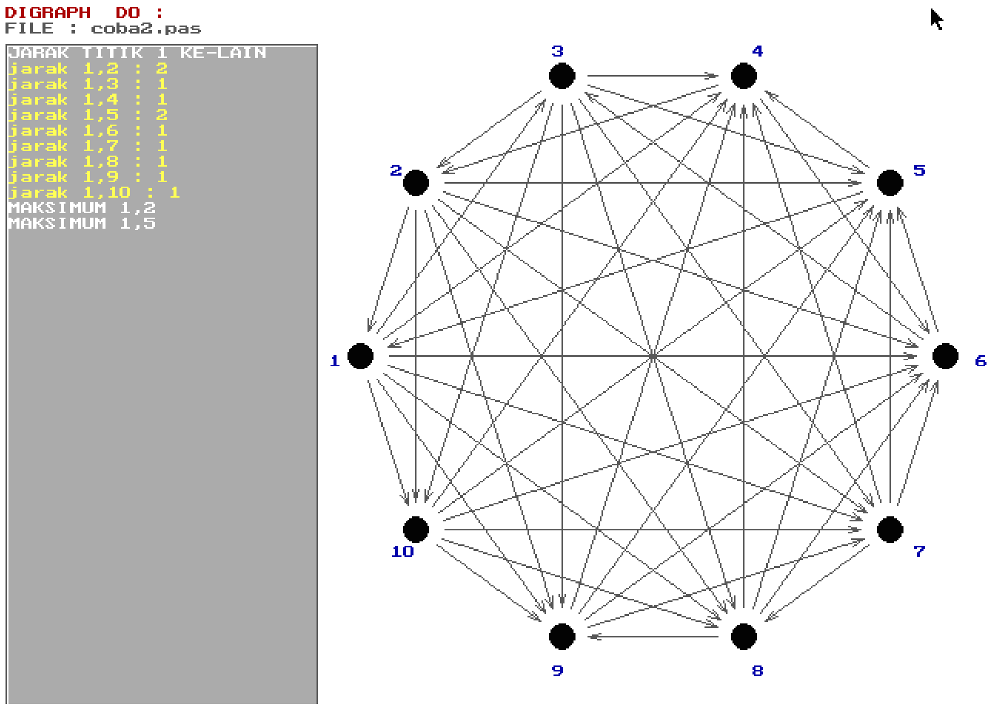
1. Untuk setiap titik *u* di *G* tentukan *d*(*u*,*v*) untuk setiap titik lain *v* di *G* dengan menggunakan algoritma Moore's Breadth First Search (MBFS).



Gambar 2. Turnamen dengan 10 titik beserta jarak dari titik 1 ke titik 2

Pada gambar 2 berarti jarak dari titik 1 ke titik 2 bernilai 2 seperti yang tertera pada kiri bawah. Lintasan terpendek yang menghubungkan titik 1 dengan 2 dengan panjang 2 terlihat pada lintasan yang berwarna biru. Dengan menggunakan algoritma MBFS berulang-ulang dapat diketahui jarak dari titik 1 ke titik yang lain. Jarak dari titik 2 dan seterusnya pada titik lain dapat juga dilakukan dengan algoritma MBFS.

2. Tentukan eksentrisitas $e(u)$ dari u yaitu $e(u) = \max_{v \in G} d(u,v)$.



Gambar 3. Tampilan jarak dari titik 1 ke titik yang lain di turnamen

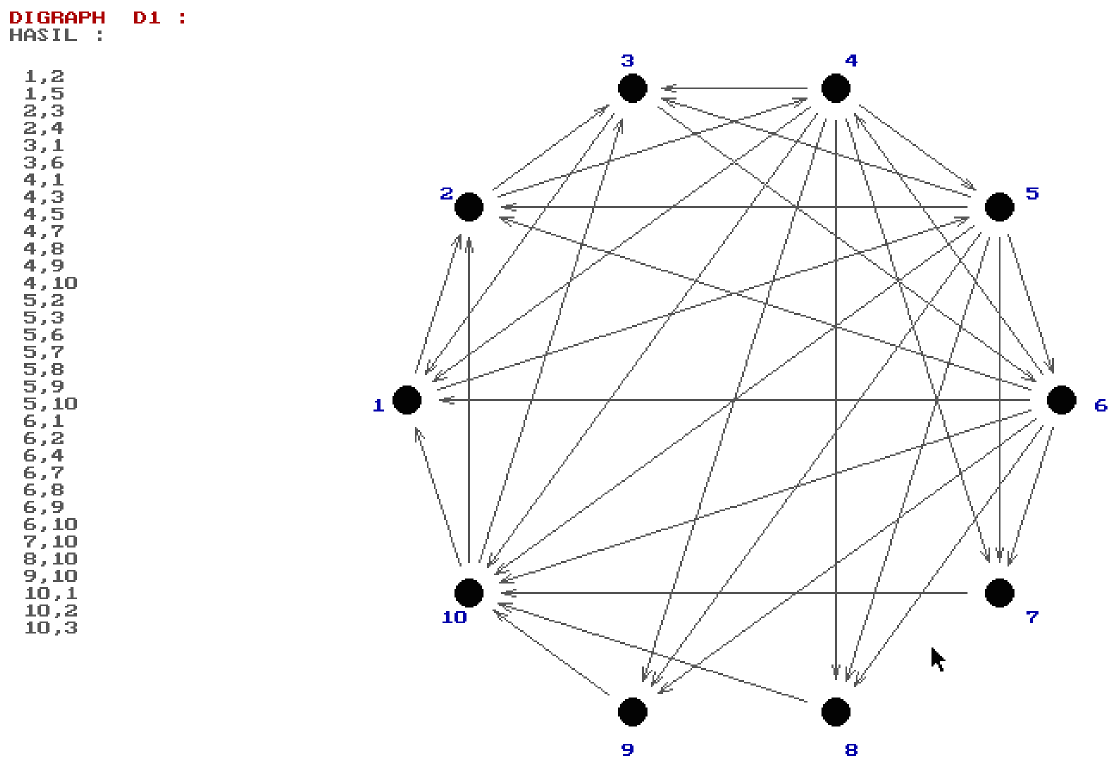
Dari hasil tampilan program terlihat bahwa $e(1) = 2$. Eksentrisitas titik 2 dan seterusnya dapat diketahui dengan melanjutkan program di atas.

3. Tentukan titik eksentrisitas dari u yaitu titik lain v di G dengan $e(u) = d(u,v)$.

Dari gambar 3 tertera bahwa jarak dari titik 1 ke titik 2 dan 5 bernilai 2, sedangkan ke titik yang lain bernilai 1 titik eksentrisitas dari titik 1 adalah titik 2 dan 5. Untuk titik lain dapat ditentukan titik eksentrisitasnya dengan melanjutkan program.

4. Hubungkan u ke v di digraf eksentris $ED(G)$.

Dengan demikian didapatkan kesimpulan bahwa pada digraph eksentris *ED*(*G*) titik 1 akan terhubung dengan titik 2 dan 5. Untuk lebih lengkapnya hasil digraph eksentris dari turnamen dengan 10 titik terlihat pada gambar 3 dibawah ini.



Gambar 4. Digraf eksentris dari turnamen dengan 10 titik

Algoritma di atas dapat dilanjutkan dengan algoritma untuk menentukan iterasi untuk digraf eksentris dari *G* sebagai berikut:

Algoritma menentukan iterasi ke-*k* digraf eksentris dari digraf *G*

Input : Digraf *G*

Output : Iterasi ke-*k* digraf eksentris $ED^k(G)$ dari digraf *G*

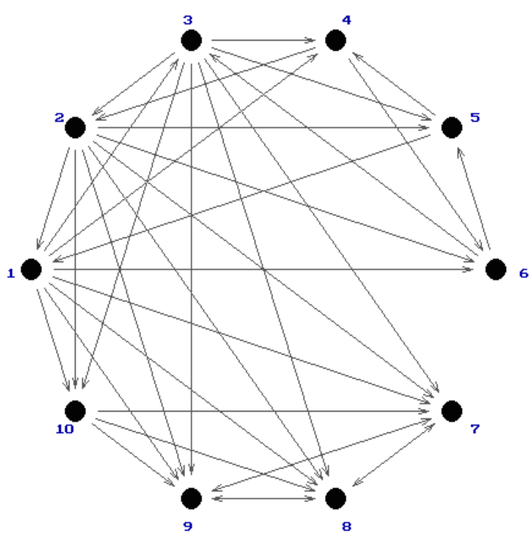
Langkah-langkah:

1. Misalkan $ED^0(G) = G$.
2. Untuk setiap *k* lakukan

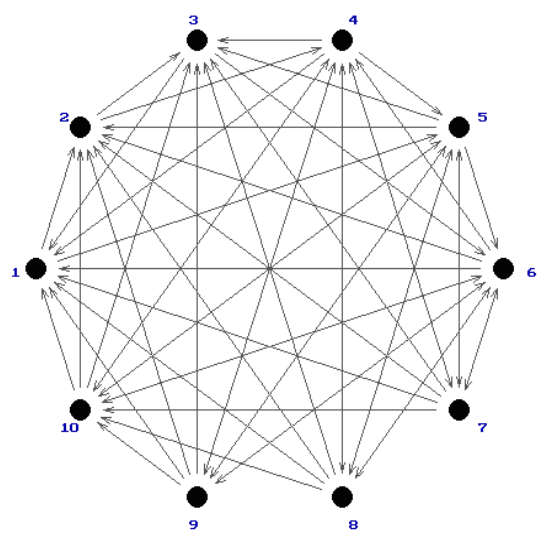
a. tentukan digraf eksentris $ED(G)$ dari G.

b. buat $G \leftarrow ED(G)$.

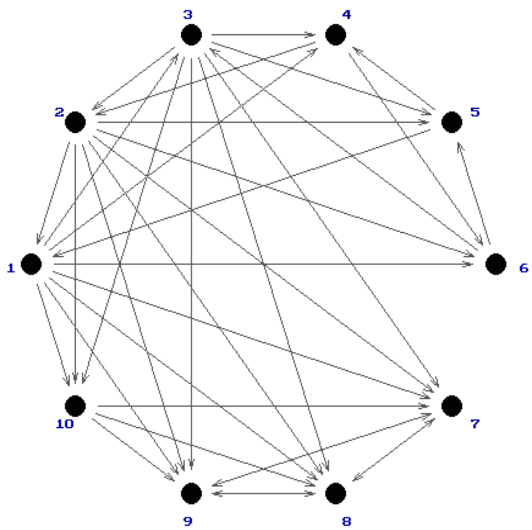
Para pembaca yang berminat untuk mendapatkan contoh program menentukan digraf eksentris hasil implementasi algoritma di atas dapat menghubungi para penulis pada alamat e-mail us6179@wolf.ubaya.ac.id. Apa yang diprediksikan oleh Iswadi (2003a) dan (2003b) tentang sifat iterasi dari turnamen regular, transitif, dan kuat ternyata cocok dengan hasil yang ditunjukkan oleh program. Gambar 5 di bawah merupakan iterasi ke-2 sampai dengan ke-5 dari turnamen dengan 10 titik. Terlihat pada digraf eksentris pada iterasi ke-2 sama dengan ke-4 dan iterasi ke-3 sama dengan ke-5. Jadi turnamen pada contoh 2 memiliki perioda $p(G) = 2$ dan $t(G) = 2$.



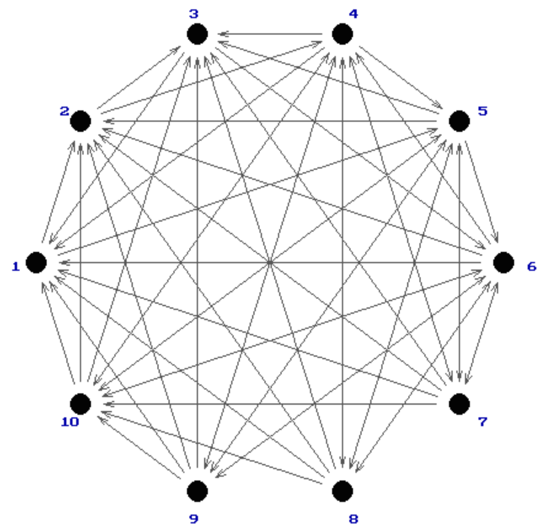
a. Digraf eksentris $ED^2(G)$



b. Digraf eksentris $ED^3(G)$



d. Digraf eksentris $ED^4(G)$



e. Digraf eksentris $ED^5(G)$

Gambar 5. Digraf berbentuk turnamen dengan 10 titik beserta iterasi ke-2 sampai ke-5

DISKUSI

Dengan bantuan tampilan digraf beserta iterasinya banyak hal yang muncul yang kemudian perlu dikaji lebih lanjut. Pada gambar 1, jika dilakukan iterasi pada digraph eksentrisnya terlihat bahwa perioda dimulai pada $ED(G)$, sedangkan pada gambar 5 terlihat bahwa perioda dimulai pada $ED^2(T)$. Bahkan pada suatu turnamen yang diambil acak oleh penulis pertama didapatkan bahwa pada iterasi ke-28 belum terlihat perelangannya. Sehingga menarik untuk diperiksa lebih lanjut apa syarat perlu dan cukup agar suatu digraf menjadi periodik? Kemudian pada gambar 4 terlihat bahwa hasil digraf eksentris dari turnamen T tidak berbentuk turnamen, sedangkan pada Iswadi (2003b) ditemukan bahwa pada turnamen regular digraf eksentrisnya berbentuk turnamen lagi yaitu kekalahan dari turnamen T. Sehingga menimbulkan pertanyaan apa syarat perlu dan cukup agar T_0 merupakan suatu digraf eksentris dari suatu turnamen T_1.

DAFTAR PUSTAKA

1. Bang-Jensen, J., dan Gutin, G., 1998, Generalizations of Tournaments: a Survey, *Journal of Graph Theory* **28**, pp. 171-202.
2. Boland, J., dan Miller, M., 2001, The eccentric digraph of a digraph, *Proceeding of AWOCA '01*, Lembang-Bandung, Indonesia, pp. 66-70.
3. Buckley, F., 2001, The eccentric digraph of a graph, *Congressus Numerantium* **149**, pp. 65-69
4. Chartrand, G. dan Lesniak, L., 1996, **Graphs and Digraphs**, edition ke-3, Chapman & Hill, London
5. Chartrand, G., dan Oellermann, O.R., 1993, **Applied and Algoritmic Graph Theory**, McGraw-Hill, New York.
6. Clark J., dan Holton, D. A., 1991, **A First Look at Graph Theory**, World Scientific, Singapore.
7. Harary, J., dan Moser, L., 1966, The theory of round robin tournaments, *American Mathematical Monthly* **73**, pp. 231-246.
8. Harminc, M., dan Ivanco, J., 1994, Note on Eccentricities in Tournament, *Graph and Combinatorics* **10**, pp. 231-234.
9. Iswadi, H., 2003a, Digraf eksentris dari turnamen transitif dan regular, *Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, vol. 8, no. 2. pp. 1-11.
10. Iswadi, H., 2003b, Digraf eksentris dari turnamen kuat, *Jurnal Matematika Aplikasi dan Pembelajarannya*, vol. 2, no. 1, Juni 2003, pp. 158-162.
11. Jimenez, G., 1998, **Domination graphs of near-regular tournaments and the domination-compliance graph**, Dissertation, University of Colorado at Denver,

Denver.

12. Miller, M., Gimbert, J., Ruskey, F., and Ryan, J., 2002, Iterations of eccentric digraphs, *Proceeding of AWOCA '02*, Fraser Island, Australia.

13. Parthasarathy, K. R., 1994, **Basic Graph Theory**, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. New Delhi.